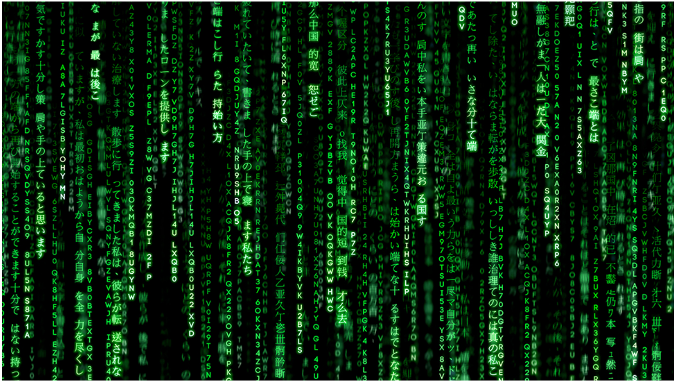
Szeregi potęgowe i szeregi Taylora

Romuald Lenczewski

Katedra Matematyki
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska

Marzec 2020

Matematyka



Matrix

Matematyka jest wszędzie

Autor zdjęcia: Jamie Zawinski

Idea

Szereg funkcji

Interesuje nas obiekt postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

gdzie (f_n) jest ciągiem funkcji, a nie liczb. Dla każdego x oddzielnie jest to szereg liczbowy, który może być zbieżny lub rozbieżny.

Szereg geometryczny

Przykładowo: dla szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

mamy:

1. zbieżność dla $|x| < 1$
2. rozbieżność do ∞ dla $x \geqslant 1$,
3. rozbieżność dla pozostałych x

Konkluzja

Oczywiście, nie chcemy badać dla każdego x oddzielnie takiego szeregu. Okazuje się, że jeżeli

$$f(x) = a_n(x - x_0)^n$$

dla kazdego n, to jest to możliwe. Czyli mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

Są to tzw. *szeregi potęgowe*.

Prosty przypadek

Najprostszy przypadek mamy gdy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ale okazuje się, że

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

też jest OK i badanie zbieżności jest bardzo podobne.

Definicja

Szeregiem potęgowym nazywamy wyrażenie postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

gdzie $a_n \in \mathbf{R}$ dla $n \geqslant 0$ oraz $x_0 \in \mathbf{R}$. Dla tych x, dla których mamy liczbowy szereg zbieżny, możemy zdefiniować funkcję

$$f : \quad x \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

i badać jej dziedzinę.

Zbieżność

Okazuje się, że dziedzina takiej funkcji to zawsze przedział na osi rzeczywistej. Diabeł tkwi w szczegółach: może to być

1. $\{x_0\}$, czyli przedział redukuje się do punktu,
2. $(x_0 - R, x_0 + R)$,
3. $[x_0 - R, x_0 + R)$,
4. $(x_0 - R, x_0 + R]$,
5. $[x_0 - R, x_0 + R]$,
6. $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

gdzie R to pewna liczba dodatnia. Możemy przyjąć, że R może być zerem, wtedy mamy przypadek 1.

Szereg geometryczny

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Gdzie

$$S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Jak wiemy, taki ciąg jest

1. zbieżny dla $|x| < 1$,
2. rozbieżny do ∞ dla $x \geqslant 1$,
3. rozbieżny dla pozostałych x

Wniosek: szereg jest zbieżny dla $x \in (-1, 1)$.
Czyli: $\mathrm{OZ} = (-1, 1)$ to tzw. obszar zbieżności.

Główne twierdzenie

Twierdzenie (Cauchy-Hadamard)

Niech będzie dany szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Sa trzy możliwości:

1. istnieje $0 < R < \infty$ takie, że szereg jest na pewno zbieżny dla $|x - x_0| < R$
2. szereg jest zbieżny tylko w $x = x_0$
3. szereg jest zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$. Liczba R nazywa się promieniem zbieżności.

Wzór 1

Wzór Cauchy'ego-Hadamarda

Jeżeli granica

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

istnieje, to promień zbieżności jest równy

1. $R = \frac{1}{\lambda}$ gdy λ jest skończone,
2. $R = \infty$, gdy $\lambda = 0$, wtedy $\mathrm{OZ} = \mathbb{R}$,
3. $R = 0$, gdy $\lambda = \infty$, wtedy $\mathrm{OZ} = \{x_0\}$.

Przykład 1

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

1. $$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$$

   z twierdzenia o 3 ciagach, ponieważ

   $$\sqrt[n]{n} \leqslant \sqrt[n]{n+1} \leqslant \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}$$

   a skrajne ciągi dążą do 1, więc $R = 1$.
2. Gdy $x = 1$, to $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1) = \infty$
3. Gdy $x = -1$, to $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)$ nie ma granicy.
4. Zatem $OZ = (-1, 1)$.

Przykład 2

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt[n]{n}}$

1. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{n}} = 1^0 = 1$$

   więc $R = 1$,
2. Gdy $x = 3$, to $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ jest rozbieżny, bo WK zbieżności nie jest spełniony
3. Gdy $x = 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ też rozbieżny z tego samego powodu
4. $OZ = (1, 3)$.

Wzór 2

Wzór d'Alemberta

Zachodzi wzór

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

o ile granica istnieje. Dwa szczególne przypadki:

1. $R = \infty$, wtedy $\mathrm{OZ} = \mathbb{R}$,
2. $R = 0$, wtedy $\mathrm{OZ} = \{x_0\}$.

Przykład 3

Przykład

Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$$

Obliczamy

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

więc $\mathrm{OZ} = (-\infty, \infty)$.

Przykład 4

Szereg $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n\ln n}$

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1$$
   więc $R = 1$.
2. Gdy $x = -1$, to $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ szereg jest rozbieżny do ∞ z kryterium całkowego, bo $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \infty$ (podstawienie $t = 1/x$)
3. Gdy $x = 1$, to szereg jest zbieżny z kryterium Leibniza.
4. Więc $\mathrm{OZ} = (-1, 1]$.

Wzór 3

Wzór Cauchy'ego-Hadamarda w wersji hardcore

Niech

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Wtedy

1. $R = \frac{1}{\lambda}$ jeżeli granica jest skończona.
2. $R = \infty$, jeżeli $\lambda = 0$, wtedy $\mathrm{OZ} = \mathbb{R}$,
3. $R = 0$ jeżeli $\lambda = \infty$, wtedy $\mathrm{OZ} = \{x_0\}$.

Granica górna

Co to jest

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} b_n?$$

Nie jest to zwykła granica funkcji. Prosty przykład:

$$b_n = (-1)^n$$

Wtedy

1. nie istnieje $\lim_{n\to\infty} b_n$ ponieważ (b_n) ma dwa stałe podciągi: $b_{2k} = 1$ oraz $b_{2k-1} = -1$,
2. największe wartości ciągu b_n dążą do 1,
3. o to właśnie chodzi w granicy górnej.

Przykład

Obliczamy formalnie $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n$

Mamy

$$\lim_{k\to\infty}(b_{2k}) = 1 \ \text{oraz} \ \lim_{k\to\infty}(b_{2k-1}) = -1$$

Wtedy definiujemy

$$\limsup_{n\to\infty}(b_n) = \sup S = 1$$

gdzie S jest zbiorem tzw. punktów skupienia ciągu (b_n), tzn. zbiorem granic podciągów ciągu (b_n).

Co to jest supremum zbioru S?

$\sup S$ to prawie $\max S$. Jeżeli maksimum istnieje, to $\max S = \sup S$. Jeżeli nie istnieje, to $\sup S$ jest najmniejszą liczbą spośród tych, które są wieksze lub równe od wszystkich elementów zbioru S. Na przykład:

$$\begin{aligned} \sup[0,1) &= 1 \\ \sup[0,1] &= 1 \\ \sup\{1-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} &= 1 \end{aligned}$$

Widać, dlaczego supremum to prawie maksimum.

Przykład

Nasz przykład raz jeszcze

Mamy

$$\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1,$$

ponieważ $S = \{1, -1\}$ a $\sup S = \max S = 1$.

Przykład szeregu na wersję hardcore

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Niewinnie wyglądający szereg, a jednak:

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & \text{gdy} \quad k = 2n+1 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Tak więc

$$\lambda = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$$

ponieważ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{2n+1}} = 1$ oraz $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$, więc mamy $S = \{0, 1\}$ i $\sup S = 1$. Stąd $R = 1$. Widać, że $\mathrm{OZ} = (-1, 1)$.

Szereg Taylora

Ciekawostka

Ciekawe jest, że wiele funkcji, które są regularne w otoczeniu jakiegoś punktu x_0, można rozwinąć w szereg potęgowy wokół tego punktu:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

gdzie liczby a_n zależą od f oraz x_0. Często rozwinięcia te zachodzą nawet na całej dziedzinie funkcji.

Szereg geometryczny

Rozwinięcie dla funkcji

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

zachodzi dla $x \in (-1, 1)$.

Wzór Taylora

Wzór Taylora

Jeżeli funkcja f oraz jej pochodne $f, f'', \ldots, f^{(n)}$ istnieją i są ciągłe na przedziale $(x_0 - r, x_0 + r) \subset D_f$, gdzie $r > 0$, to istnieje taki punkt $c \in (x, x_0)$ (jeżeli $x < x_0$) lub $c \in (x_0, x)$ (jeżeli $x_0 < x$), że

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + R_n(x)$$

gdzie

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

jest tzw. resztą. Jeżeli reszta dąży do zera gdy $n \to \infty$, to możemy mieć nadzieję, że otrzymamy rozwinięcie funkcji f w szereg w pobliżu x_0.

Przykład

Wzór Taylora dla $f(x) = e^x$

To jeden z łatwiejszych przykładów, ponieważ przyjemnie liczy się pochodne:

$$f'(x) = e^x,\ f''(x) = e^x,\ f^{(3)}(x) = e^x, \ldots, f^{(n)}(x) = e^x$$

więc

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1,\ f^{(3)}(0) = 1, \ldots, f^{(n)}(c) = e^c$$

Stąd mamy

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^c}{n!}x^n$$

Widać, że reszta dąży do zera dla każdego x gdy $n \to \infty$.

Bad news

Pochodne!

Zazwyczaj jest trudniej, więc trzeba umieć obliczać pochodne!

Rozwinięcie w szereg Taylora

Jeżeli $f : D_f \to \mathbf{R}$ ma wszystkie pochodne ciągłe na $\mathcal{O} = (x_0 - r, x_0 + r) \subset D_f$ oraz $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ dla $x \in \mathcal{O}$, to

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

dla $x \in \mathcal{O}$. Szereg ten nazywa się szeregiem Taylora funkcji f w otoczeniu $\mathcal{O}$ punktu x_0.

Przykład 1

Szereg Taylora dla $f(x) = e^x$

Prawie za darmo mamy szereg Taylora dla $f(x) = e^x$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ponieważ dla każdego $x \in \mathcal{O} = (-r, r)$ mamy

$$R_n(x) = \frac{e^c}{n!} x^n \to 0$$

na $\mathcal{O}$, więc mamy rozwinięcie Taylora na $\mathcal{O}$. Ponieważ r dowolne, to rozwinięcie zachodzi dla $x \in \mathbf{R}$ i promień zbieżności $R = \infty$.

Przykład 2

Szereg Taylora dla $f(x) = \sin x$

Mamy

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f^{(3)}(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x, \ldots$$

więc

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f^{(3)}(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0, \ldots$$

Rozwinięcie:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbf{R}$$

dla $x \in \mathbf{R}$, bo reszta $|R_n| = |\frac{1}{n!} f^{(n)} x^n| \leqslant \frac{1}{n!}|x^n| \to 0$

Inne przykłady

Znane szeregi Taylora

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1]$$

Jednoznaczność

Jednoznaczność

Jeżeli

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

dla $x \in (x_0 - r, x_0 + r) \subset D_f$, wtedy $b_n = f^{(n)}(x_0)/n!$.

Przykład

Ciekawe zastosowanie

Dla funkcji
$$f(x) = 1/(1+x^3)$$
możemy obliczyć $f^{(12)}(0)$. Mamy dla $x_0 = 0$ rozwinięcie:
$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}$$
dla $-1 < x < 1$, więc
$$(-1)^4 = b_{12} = \frac{f^{(12)}(0)}{12!}$$
Zatem $f^{(12)}(0) = 12!$.

Przykład

Szereg Taylora dla $f(x) = \ln(1 + x^2)$

Wykorzystujemy rozwinięcie dla $\ln(1 + y)$ wokół $y_0 = 0$:

$$\ln(1 + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} y^{n+1}$$

i podstawiamy $y = x^2$:

$$\ln(1 + x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} x^{2n+2}$$

co daje rozwinięcie Taylora dla f z jednoznaczności.
Łatwo sprawdzić, że $R = 1$.

Różniczkowanie i całkowanie

Twierdzenie

Szeregi potęgowe można różniczkować i całkować wyraz po wyrazie wewnątrz obszarów zbieżności (niekoniecznie na końcach).

Różniczkowanie

Twierdzenie

Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ma dodatni promień zbieżności, to można go różniczkować wyraz po wyrazie

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

dla $x\in(x_0-R,x_0+R)$.

Całkowanie

Twierdzenie

Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ma dodatni promień zbieżności, to można go całkować wyraz po wyrazie

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

dla $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Przykład

Można sprytnie wyznaczyć szereg Taylora dla $f(x) = \mathrm{arctg} x$, $x_0 = 0$. Mamy

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$$

dla $x \in (-1, 1)$. Całkujemy wyraz po wyrazie:

$$\mathrm{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

Przykłady

Przykład

Obliczyć

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n}$$

Bierzemy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = \frac{x}{1-x^2}$$

Wtedy

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}$$

więc, ponieważ $f'(x) = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}$, mamy $f'(\frac{1}{2}) = \frac{20}{9}$.

Koniec

Dziękuję za uwagę!